數學傳播　48卷3期, pp. 59-67

2024年第65屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2024 年第 65 屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 原定由烏克蘭基輔主辦, 後於 2020 年因烏俄戰事爆發, IMO 委員會 (IMO Board) 發起動議, 由 2019 年 IMO 主辦城市英國巴斯接手續辦, 於同年由全體會員國投票通過。本屆共有 109 個國家與會、合計 609 位學生 (含 81 位女學生) 代表參賽。

依循往例, IMO 先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee, 簡稱 PSC) 研究選出 30 道左右的預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。

本屆試題第一題的領域爲代數, 第二題爲數論, 第三題爲組合, 第四題爲幾何, 第五題爲組合, 第六題爲代數。就整體試卷分配而言, 是幾何成份偏少的一年。在此對我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

問題一: 試求所有實數α, 使得對於所有正整數n, 整數

$$\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor 2\alpha\rfloor+\cdots+\lfloor n\alpha\rfloor$$

皆爲 n 的倍數。(此處 $\lfloor z\rfloor$ 表示不大於 z 的最大整數。舉例來說, $\lfloor -\pi\rfloor=-4$ 且 $\lfloor 2\rfloor=\lfloor 2.9\rfloor=2$。)

試題委員會公布的參考答案: 答案是所有的偶數 α。

令 α 的整數與小數部分分別爲 $k=\lfloor\alpha\rfloor$ 與 $\epsilon=\{\alpha\}=\alpha-k$, 則易知

$$S(\alpha;n):=\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor 2\alpha\rfloor+\cdots+\lfloor n\alpha\rfloor=\frac{kn(n+1)}{2}+\lfloor\epsilon\rfloor+\lfloor 2\epsilon\rfloor+\cdots+\lfloor n\epsilon\rfloor=\frac{kn(n+1)}{2}+S(\epsilon;n).$$

以下分情況討論。

1. k是偶數:

   由於此時 $n \mid \frac{kn(n+1)}{2}$ 恆成立, 因此 $n \mid S(\alpha;n)$ 若且唯若 $n \mid S(\epsilon;n)$。

   讓我們用數學歸納法證明此時必有 $\lfloor n\epsilon \rfloor = 0$ 對於所有正整數 n 皆成立。$n=1$ 時顯然。現在假設 $\lfloor m\epsilon \rfloor = 0$ 對於 $1 \le m < n$ 皆成立, 此時

$$\lfloor n\epsilon \rfloor = \sum_{m=1}^{n-1} \lfloor m\epsilon \rfloor + \lfloor n\epsilon \rfloor = S(\epsilon;n)$$

   必須是 n 的倍數。但同一時間, 我們又有 $0 \le \lfloor n\epsilon \rfloor \le n\epsilon < n$, 故必須有 $\lfloor n\epsilon \rfloor = 0$。

   現在, $\lfloor n\epsilon \rfloor = 0$ 表示 $0 \le \epsilon < 1/n \xrightarrow{x\to\infty} 0$, 故 $\epsilon = 0$, 亦即此時 α 必須是偶數。

2. k是奇數:

   讓我們用數學歸納法證明此時必有 $\lfloor n\epsilon \rfloor = n-1$ 對於所有正整數 n 皆成立。$n=1$ 時顯然。現在假設 $\lfloor m\epsilon \rfloor = m-1$ 對於 $1 \le m < n$ 皆成立, 此時

$$\begin{aligned} S(\alpha;n) =& \frac{kn(n+1)}{2} + \lfloor \epsilon \rfloor + \lfloor 2\epsilon \rfloor + \cdots + \lfloor n\epsilon \rfloor \\ =& \frac{kn(n+1)}{2} + 0 + 1 + \cdots + (n-2) + \lfloor n\epsilon \rfloor \\ =& \frac{k+1}{2}n^2 + \frac{k-3}{2}n + 1 + \lfloor n\epsilon \rfloor \end{aligned}$$

   必須是 n 的倍數。但同一時間, 我們又有 $0 \le \lfloor n\epsilon \rfloor \le n\epsilon < n$, 也就是 $\lfloor n\epsilon \rfloor + 1 \in [1, n+1)$, 故必須有 $\lfloor n\epsilon \rfloor + 1 = n$, 也就是 $\lfloor n\epsilon \rfloor = n-1$。但這意味著 $1 - \frac{1}{n} < \epsilon < 1$ 對於所有正整數 n 皆成立, 矛盾! 因此 k 不能爲奇數。

綜合以上, α 的唯一可能是偶數, 證畢。

評註: 此爲一簡單的代數題, 只要求最初階的分析能力, 是個適合入門用的題目。

問題二: 試求所有正整數對 (a,b) 使得存在正整數 g 與 N 滿足

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

對於所有整數 $n \ge N$ 皆成立。(此處 $\gcd(x,y)$ 表示 x 和 y 的最大公因數。)

試題委員會公布的參考答案: 唯一解爲 $(a,b) = (1,1)$。

令 $K := ab+1$, 並考慮任何質數 $p|K$。易見 a、b 皆和 p 互質。令 $n \ge N$ 且 $n \equiv -1 \mod p-1$, 則由費馬小定理知 $a^n + b \equiv a^{-1} + b \equiv a^{-1}(1+ab) \equiv 0 \mod p$, 同理 $b^n + a \equiv 0 \mod p$, 故有 $p|g$。這意味著 $p|a^n + b$ 與 $p|b^n + a$ 對於 所有 $n \ge N$ 皆成立。然而, a^n 與 b^n 皆爲周期函數且其周期整除 $p-1$, 故 $p|a^n + b$ 與 $p|b^n + a$ 對於 所有整數 n 皆成立。

考慮 $n = 0$ 與 $n = 1$, 知 $a+1$、$b+1$、$a+b$ 都被 p 整除, 從而 $p|(a+b)-(a+1)+(b+1) = 2b$; 但 $p \nmid b$, 故 $p = 2$。這表示 $K = ab+1$ 必須爲 2 的冪次。

現在, 當 $(a,b) \neq (1,1)$ 時, $ab+1 > 2$ 故必有 $4|ab+1$, 而這意味著 $(a,b) \equiv (-1,1)$ 或 $(1,-1) \mod 4$, 不失一般性爲後者。但此時我們有 $a^n+b \equiv 0 \mod 4$ 與 $b^n+a \equiv (-1)^n+1 \mod 4$; 換言之, $\gcd(a^n+b, b^n+a)$ 在奇數 n 時被 4 整除, 但在偶數 n 時不被 4 整除, 因此 $\gcd(a^n+b, b^n+a)$ 不可能對於充分大的 n 是常數, 矛盾。故 $(a,b) = (1,1)$ 是唯一解。

評註: 此爲一中等難度的數論題, 要求對費馬小定理等數論工具之掌握, 對於有完整數論訓練的學生而言是在能力範圍內的題目。

問題三: 令 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 爲無限長的正整數列, 且 N 爲一正整數。假設對於所有 $n > N$, a_n 等於整數 a_{n-1} 在數列 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 中出現的次數。證明在 $a_1, a_3, a_5, \ldots$ 與 $a_2, a_4, a_6, \ldots$ 此兩數列中, 至少有一者最終會循環。

(我們稱一個無窮數列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ 最終會循環, 若存在正整數 p 與 M 使得 $b_{m+p} = b_m$ 對於所有 $m \geq M$ 皆成立。)

試題委員會公布的參考答案: 爲了方便起見, 以下令 $a_{i:j}$ 爲子數列 $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$。

設 $M = \max a_{1:N}$。首先我們證明某個整數會出現無限次。若否, 那麼數列中將包含任意大的整數, 而每個大於 M 的數在數列中第一次出現時, 後面必跟著一個 1, 從而 1 出現無限多次, 矛盾。

我們接著證明每個大於等於 M 的整數 x 最多只會出現 $M-1$ 次。若否, 考慮第一次有某個 $x \geq M$ 出現第 M 次, 假設這前 M 次是 $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_M}$。注意到每個 a_{k_i-1} 都是一個在 a_{k_i} 前出現 $x \geq M$ 次的數字, 因此在 a_{k_M} 前至少有 M 個已經出現過 M 次的數字, 但這與 x 的定義相矛盾。

因此, 只有有限多個數字會出現無限次, 令其中最大者爲 k。由於 k 出現無限次, 數列中必定有無限多個大於 M 的整數, 從而每個整數 $1, 2, \ldots, k-1$ 也都會出現無限次。又 $k+1$ 並不會無限次出現, 因此出現次數超過 k 次的數字必定是有限的, 令這些數字中最大者爲 $\ell \geq k$。

至此, 我們稱 (ℓ, ∞) 裡的數字爲大數字, $(k, \ell]$ 內的數字爲中數字, 而 $[1, k]$ 裡的數字爲小數字。注意到只有小數字會出現無窮多次, 而大數字至多出現 k 次。因此, 存在充分大的 $N' > N$, 使得 $a_{N'}$ 爲小數字, 且在 $a_{1:N'}$ 中:

(a) 所有中數字都已經出現過, 且不會再出現;

(b) 所以小數字都至少出現過$\max(k, N)$次。

注意到此時任何小數字都已經出現至少 k 次了, 因此在 N' 之後的小數字都必然會跟著一個大數字 (因爲中數字不會再出現了); 但由定義, 每個大數字至多出現 k 次, 因此這些大數字都必

然會跟著一個小數字。這表示從某一項開始, 數列會在大數字與小數字之間交替。

事實上, 我們有以下兩個引理:

引理 1. 若 $M > N'$, $g = a_M$ 是大數字, 則 $h = a_{M+1}$ 是小數字, 且 h 等於在 $a_{1:M}$ 中出現至少 g 次的小數字數量。

證明: 由於 a_{M-1} 是小數字, 故由 (b), $g \geq N$。這意味著所有小數字的第 g 次出現都會發生在 N 之後, 且其後一項的值必然為 g。但由於每個大數字都至多出現 k 次, 而總共有 k 個小數字, 這表示 g 必須出現恰好 k 次 (對應每個小數字各一次), 且後面必然跟著一個小數字。此結構直接保證了 h 等於在 $a_{1:M}$ 中出現至少 g 次的小數字數量。 □

引理 2. 若 $i, j \in \mathbb{N}$ 滿足:

(A) $j > i > N' + 2$;

(B) a_i 是小數字且 $a_i = a_j$;

(C) 沒有任何小數字在 $a_{i:(j-1)}$ 中出現多於一次。

則 a_{i-2} 等於 $a_{i:(j-1)}$ 中的某個小數字。

證明: 設 I 為在 $a_{1:(i-1)}$ 中至少出現過 a_{i-1} 次的小數字的集合。由 引理 1, $a_i = |I|$。同理, 設 J 為那些在 $a_{1:(j-1)}$ 中至少出現過 a_{j-1} 次的小數字的集合, 則$a_j = |J|$。由 (B), 我們知道$|I| = |J|$。此外, 根據定義, 有 $a_{i-2} \in I$ 且 $a_{j-2} \in J$。

我們來證明$a_{j-2} \in I$。歸謬, 假設 $a_{j-2} \notin I$, 則 a_{j-2} 在 $a_{1:(i-1)}$ 中出現的次數少於 a_{i-1}。又根據 (C), a_{j-2} 在 $a_{1:(j-1)}$ 中最多出現 a_{i-1} 次, 因此 $a_{j-1} \leq a_{i-1}$。但基於 $a_{1:(i-1)} \subseteq a_{1:(j-1)}$, 我們必須有 $I \subseteq J$。但由於 $a_{j-2} \in J \setminus I$, 我們必有 $|I| < |J|$, 這與前一段的$|I| = |J|$相矛盾。故 $a_{j-2} \in I$。

又注意到因為 $a_{j-2} \in I \cap J$, 我們知道 a_{j-2} 在 $a_{1:(i-1)}$ 中至少要出現 a_{i-1} 次, 並且在 $a_{i:(j-1)}$ 中至少還要出現一次。這意味著 $a_{j-1} > a_{i-1}$。

現在, 根據 (C) , 任何在 $a_{1:(j-1)}$ 中至少出現過 a_{j-1} 次的小數字在 $a_{1:(i-1)}$ 中也至少出現了 $a_{j-1} - 1 \geq a_{i-1}$ 次, 所以 $J \subseteq I$, 故 $I = J$。這表示 $a_{i-2} \in J$, 從而它必須在 $a_{i:(j-1)}$ 中再出現至少 $a_{j-1} - a_{i-1} = 1$ 次。 □

回到原題。對於滿足 $n > N' - 2$的小數字 a_n, 令 p_n 為最小的正整數使得有一個小數字 s 在 $a_{n:(n+p_n-1)}$ 中出現兩次; 假設這兩次出現是 a_i 與 a_{n+p_n}。注意到若 $i > n$, 因為 a_n 是小數字且已知大小數字交替出現, 故 $i \geq n+2$, 因此 $i-2 \geq n$; 但由 引理 1, a_{i-2} 將在 $n + p_n$ 之前再出現一次, 這與 p_n 的最小性不合, 矛盾! 故 $i = n$。

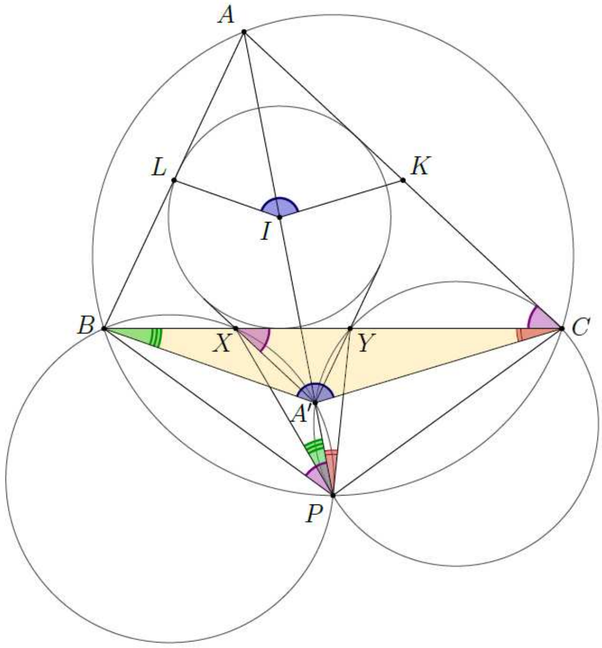
現在, 由引理 2, 我們有 $p_n \geq p_{n-2}$, 因此 $p_n, p_{n-2}, p_{n-4}, \ldots$ 是一個有上界 $2k$ 的非遞減數列 (因為只有 k 個小數字)。這表示 $p_n, p_{n-2}, p_{n-4}, \ldots$ 最終必須是常數, 也因此意味著小數

字所形成的子序列最終會是週期至多 k 的週期性序列。證畢。 □

評註: 此爲一困難的組合題目, 全世界僅 8 人答對, 另 7 人得到 6 分。能否觀察到大小數字交替是切入題目的關鍵。

問題四: 令 ABC 爲一三角形, 其中 $AB < AC < BC$。令 ABC 的內心與內切圓分別爲 I 和 ω。令 X 爲 BC 線上異於 C 的點, 使得過 X 且平行 AC 的直線與 ω 相切。類似地, 令 Y 爲 BC 線上異於 B 的點, 使得過 Y 且平行 AB 的直線與 ω 相切。令 AI 與 ABC 外接圓再次交於 $P \neq A$。令 K 與 L 分別爲 AC 與 AB 的中點。

證明 $\angle KIL + \angle YPX = 180°$。



試題委員會公布的參考答案: 令 A' 爲 A 對 I 上的對稱點, 則 A' 位於AP 角平分線上。線 $A'X$ 和 $A'Y$ 分別是 AC 和 AB 對 I 的對稱線, 因此它們與 ω 切於 X 與 Y。由雞爪定理, $PB = PC = PI$, 並且由於 $\angle BAP = \angle PAC$, 所以 $PB = PC$ 大於外接圓半徑。因此 $PI > \frac{1}{2}AP > AI$, 我們得出 A' 位於線段 AP 的內部。

由外接圓我們知 $\angle APB = \angle ACB$, 並且由 $A'X \parallel AC$ 知 $\angle ACB = \angle A'XC$, 故 $\angle APB = \angle A'XC$, 因此 $BPA'X$ 四點共圓。同理, $CYA'P$ 四點共圓。

現在我們要將 $\angle KIL + \angle YPX$ 轉換爲三角形 $A'CB$ 內角的和。通過以 A 爲中心, 倍數 2 的位似變換, 我們有 $\angle KIL = \angle CA'B$。考慮圓 $BPA'X$ 與圓 $CYA'P$, 我們有

$\angle APX=\angle A'BC$ 和 $\angle YPA=\angle BCA'$, 故

$$\angle KIL=\angle YPX=\angle CA'B=\angle YPA+\angle APX=\angle BCA'+\angle A'BC=180^\circ.$$

評註: 此爲一稍微進階一點的簡單幾何, 解題方式衆多, 官方就提供了至少八種解法, 值得學生一試。

問題五: 蝸牛渦寶在一個 2024 橫列、2023 直排的棋盤上進行遊戲。棋盤上有 2022 隻隱形的怪獸。遊戲開始時, 渦寶不知道怪物的位置, 但牠知道除了第一橫列與最後一橫列外, 每一橫列都恰有一隻怪獸, 且每一直排都至多只有一隻怪獸。

渦寶將發起若干次探險, 嘗試從第一橫列爬到最後一橫列。每一次探險, 牠選擇第一橫列的一格作爲起點, 接著開始爬行, 每一步都選擇移動到一個與其所在格子有公共邊的格子 (牠可以造訪之前去過的格子)。若其抵達有怪物的格子, 則該次探險結束, 而渦寶會回到第一橫列開始新的探險。怪物不會移動, 且渦寶會記得牠造訪過的各格中有沒有怪物。若牠抵達最後一橫列, 則探險結束且遊戲結束。

試求最小可能的 n , 讓渦寶存在一個策略, 使得不論怪物如何分佈, 牠都可以保證在 n 次探險內抵達最後一橫列。

試題委員會公布的參考答案: 最小可能的 $n=3$; 此最佳值獨立於棋盤大小。

我們先證明 $n>2$。設蝸牛第一次抵達的第二橫列格子是 $(2,i)$, 則若該格有怪獸, 則蝸牛會被彈回第一橫列, 這表示蝸牛無法保證在第一次探險就成功。此外, 注意到此時蝸牛對於第三橫列的怪獸, 除了牠不會出現在 $(3,i)$ 以外一無所知, 因此牠也無法迴避在第一次抵達第三橫列時撞到怪獸。以上表示 $n>2$。

接下來構造 $n=3$ 的策略。第一次探險, 讓蝸牛將從第一橫列開始, 從上到下依序搜索各橫列, 並且依據第一次撞到的怪物是在圖 1 的三角形區域內或外, 提供不同的策略:

1. 若蝸牛第一次撞到的蝸牛在三角形內 (如圖 1 中 M_1 處), 注意到因爲我們是從上到下依序搜索各橫列, 因此我們知道 M_1 的左上角與右上角兩格都是可以被安全抵達的。換言之, 我們可以用接下來的兩次探險, 各探險圖 1 中的其中一條路徑, 而其中必有一條路徑是安全的 (因爲每橫列與每直排都至多只有一隻怪獸。) 因此, 此狀況保證可以在 3 次探險內結束遊戲。
2. 若蝸牛第一次撞到的蝸牛在三角形外 (如圖 2 中 M_1 處), 注意到因爲我們是從上到下依序搜索各橫列, 因此我們知道 M_1 的左上角與右上角兩格中, 至少有一格是可以被安全抵達的 (注意到 M_1 可能在最左或最右直排), 不失一般性爲右上角, 如圖 2 的星星處。
   第二次探險, 我們先讓蝸牛安全抵達星號處, 接下來如圖中所示向下進行階梯狀移動。假設此時牠在圖中 M_2 處撞到怪獸, 則注意到這會保證圖 2 右圖中的路徑是安全 (因爲每橫列

與每直排都至多只有一隻怪獸。) 換言之, 我們必可以在三次探險中抵達最底端。

綜以上, 此策略必可在三次探險內可抵達底端。證畢。 □

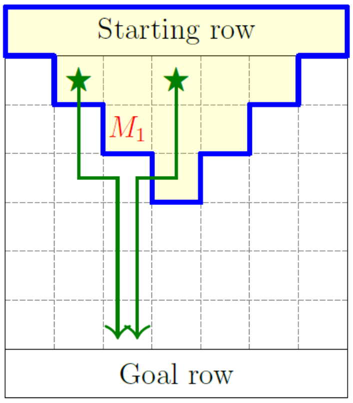


圖 1: 三角形內策略

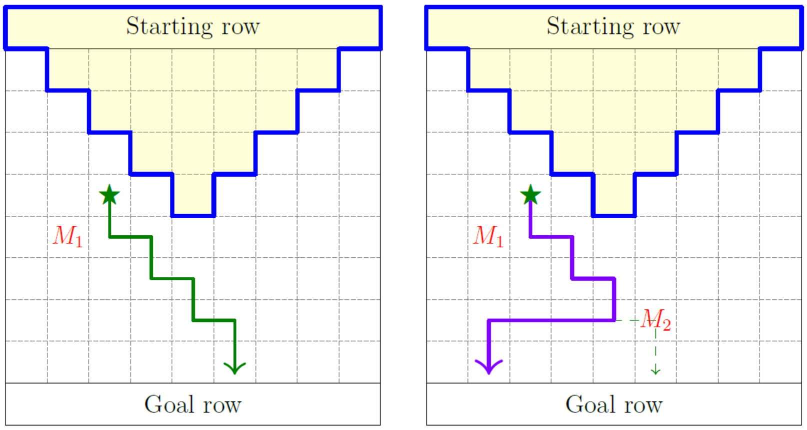


圖 2: 三角形外策略

評註: 這是一題初看簡單, 在賽場上卻比預期中困難的題目, 其平均得分 2.246 甚至低於第二題的 2.544。主要原因是, 對於 $(N+1) \times N$ 大小的棋盤, 很容易可以看出一個要求 $O(\log N)$ 次探險的策略, 這 "看起來" 很像是一個 IMO 中等題目會出現的下界, 而且在 2023 IMO 的第五題還真的出現過這個 order 的下界。考生會需要拋開一些既有成見才會意識到下界有可能是個常數。事實上, 就連中國隊也只有三個人這題拿到滿分, 韓國隊更是只有一個人答對。平均而言, 歐美國家在這題的表現優於亞洲國家, 這或許反應了某些數學競賽文化的差異。
備註: 嚴格說來, 在逐橫排搜索的策略下, 只有在最左或最右邊遇到怪獸會需要使用第二種路徑策略。官方解答使用三角形區域的敘述, 僅是爲了涵蓋其他可能的搜索順序。

問題六: 令 $\mathbb{Q}$ 爲所有有理數所成的集合。一個函數 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 被稱爲媽祖的[a], 若其滿足以下性質: 對於每一組 $x,y\in\mathbb{Q}$,

$$f(x+f(y))=f(x)+y \text{ 或 } f(f(x)+y)=x+f(y) \tag{1}$$

至少一者成立。證明存在一個整數 c, 使得對於任何媽祖的函數 f, 皆至多有 c 個可被表示爲 $f(r)+f(-r)$的相異有理數, 其中 r 爲有理數; 並求 c 的最小可能值。

試題委員會公布的參考答案:答案爲 $c=2$。爲了方便起見, 我們將使用以下符號:

- $a\backsim b$ 表示 $f(a)=b$ 或 $f(b)=a$;
- $a\to b$ 表示 $f(a)=b$;
- $P(x,y)$ 表示將 x 與 y 代入 (1) 所得性質, 也就是 $f(x)+y\backsim f(y)+x$;
- $g(x):=f(x)+f(-x)$。

構造: 首先給出滿足 $c=2$ 的解。考慮 $f(x)=\lfloor x\rfloor-\{x\}$, 也就是 x 的整數部分減去 x 的小數部分。注意到對於 $x,y\in\mathbb{Q}$,

$$f(x)+y=\lfloor x\rfloor-\{x\}+\lfloor y\rfloor+\{y\}=(\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor)+(\{y\}-\{x\}).$$

又若$\{x\}<\{y\}$, 則$\lfloor f(x)+y)\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ 且$\{f(x)+y\}=\{y\}-\{x\}$, 故$f(x)+y\to x+f(y)$。同理可得, 若$\{x\}<\{y\}$, 則$x+f(y)\to f(x)+y$。故 $f(x)$ 滿足題意。

現在, 經計算知 $g(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$, 故 $c=2$。

估計: 由 $P(x,x)$ 顯然有

$$x+f(x)\to x+f(x) \tag{2}$$

對於所有 $x\in\mathbb{Q}$。我們藉此證明以下引理。

引理 3. f爲雙射且

$$f(-f(-x))=x. \tag{3}$$

證明: 首先證明單射。假設 $f(x)=f(y)$, 則由 $P(x,y)$ 知 $f(x)+y\to f(y)+x$ 或 $f(y)+x\to f(x)+y$, 不失一般性爲前者。但這表示 $f(y)+y=f(f(y)+y)=f(f(x)+y)=f(y)+x$, 故 $x=y$。故 f 單射。

[a]原英文題敘爲 aquaesulian 函數。Aquae Sulis 是巴斯地名, 爲拉丁文, 意旨凱爾特女神蘇利斯的水。大會允許各語言翻譯自由替換此詞彙, 故以臺灣民間常見海神替換之。

接著證明 $f(0)=0$。由 $P(0,0)$ 知 $f(f(0))=f(0)$, 故由單射知 $f(0)=0$。

接著證明 (3)。由 $P(x,-f(x))$ 知 $0\backsim x+f(-f(x))$。此時有兩種可能:

- $0=f(0)=x+f(-f(x))$, 也就是(3)成立;
- $f(x+f(-f(x)))=0$, 從而由單射知$x+f(-f(x))=0$, 也就是(3)成立。

故 (3) 恆成立。

最後, (3) 直接隱含 f 滿射, 故證畢。 □

注意到因爲 f 雙射, (3) 可改寫爲 $f(-x)=-f^{-1}(x)$, 因此 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$。

現在, 回到原題, 討論 g 的相異值數量。假設存在 (x,y) 使得 $u:=g(x)\neq 0$, $v:=g(y)\neq 0$ 且 $u\neq v$。令 $x'=f^{-1}(x)$ 與 $y'=f^{-1}(y)$, 則由定義,

$$\begin{aligned} x' &\to x\to f(x)=g(x)+f^{-1}(x)=u+x';\\ y' &\to y\to f(y)=g(y)+f^{-1}(y)=v+y'. \end{aligned} \tag{4}$$

注意到 $P(x',y)$ 得 $x+y\backsim x'+y'+v$, 而 $P(x,y')$ 得 $x+y\backsim x'+y'+u$。但由於 $u\neq v$, $x'+y'+u\neq x'+y'+v$; 再由於 f 爲單射, $x'+y'+v\to x+y$ 與 $x'+y'+u\to x+y$ 不可能同時成立, 故我們可不失一般性假設

$$x'+y'+u\to x+y\to x'+y'+v. \tag{5}$$

另一方面, 由引理 3, 我們有 $-x'-u\to -x\to -x'$。結合 (5) 與 $P(x+y,-x'-u)$, 得

$$y\backsim y'+v-u. \tag{6}$$

但基於 (6), 我們知道 $y'+v-u$ 必須爲 $y'+v$ 或 y', 從而 u 必須爲 0 或 v, 矛盾! 因此 $u=v\neq 0$, 也就是 g 至多只有一個非零值; 加上 $g(x)=0$ 的可能性, 我們有 $c\leq 2$。

評註: 此爲非常困難的代數題, 全球僅 5 個人全對, 1 個人得六分。受過函數方程訓練的學生不難得到引理 3, 但再往後的步驟相當難以發覺。

—本工作小組係由教育部委託國立台灣師範大學, 於「中華民國參加 2024 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者爲高竹嵐副教授, 任教於國立陽明交通大學統計學研究所。—